

# Логарифмическая функция для натуральных чисел

Георгий Гуляев

4 июля 2026 г.

## Определение и теоремы

Введем функцию  $l(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  при помощи следующих трех равенств:

1.  $l(1) = 0$ ,
2.  $l(p) = p$ , если  $p$  - простое число,
3.  $l(m \cdot n) = l(m) + l(n)$  для любых  $m, n \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 1.**  $l(n^m) = m \cdot l(n)$  для любых  $m, n \in \mathbb{N}$ .

**Доказательство.** При  $m = 1$  утверждение теоремы очевидно. Если  $m > 1$ , то, согласно третьему равенству определения,  $l(n^m) = l(n \cdot n^{m-1}) = l(n) + l(n^{m-1})$ . Если  $m > 2$ , то продолжим  $l(n^{m-1}) = l(n) + l(n^{m-2})$ , и так далее. В результате получим ровно  $m$  слагаемых  $l(n)$ . Что и требовалось доказать.

Полагая  $n = p$ , где  $p$  - простое и, используя равенство 2 определения, получаем следствие теоремы 1.

**Следствие 1.**  $l(p^m) = m \cdot p$  для простого  $p$  и  $m \in \mathbb{N}$ .

В том случае, когда оба  $n$  и  $m$  - простые, то есть  $n = p$ ,  $m = q$ , согласно следствию 1 имеем  $l(p^q) = p \cdot q$  и  $l(q^p) = p \cdot q$ , поэтому верно второе следствие.

**Следствие 2.**  $l(p^q) = l(q^p)$  для любых простых  $p$  и  $q$ .

Пусть  $n > 1$  натуральное число, тогда его можно представить единственным способом в виде канонического разложения на простые множители:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \quad (1)$$

где  $p_1, \dots, p_k$  - различные простые,  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  - натуральные числа.

**Теорема 2.**  $l(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}) = p_1 \cdot \alpha_1 + p_2 \cdot \alpha_2 + \dots + p_k \cdot \alpha_k$ .

**Доказательство.** Используя третье свойство определения, произведение преобразуем в сумму и, далее, применяем следствие 1.

$$l(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}) = l(p_1^{\alpha_1}) + l(p_2^{\alpha_2}) + \dots + l(p_k^{\alpha_k}) = p_1 \cdot \alpha_1 + p_2 \cdot \alpha_2 + \dots + p_k \cdot \alpha_k$$

Таким образом, определенная нами функция  $l(n)$  преобразует степени в произведения, а произведения в суммы. В этом смысле она похожа на обычную логарифмическую функцию. Однако есть и существенное различие. Для нее не существует аналога основного свойства обычного логарифма, вытекающего из его определения:

$$a^{\log_a b} = b.$$

**Теорема 3.** Не существует таких натуральных  $a$  и  $b$ , чтобы выполнялось равенство:

$$a^{l(b)} = b. \quad (2)$$

**Доказательство.** Предположим, что равенство (2) выполняется для некоторых натуральных  $a$  и  $b$ , Тогда, применяя функцию  $l(n)$  к обеим частям, получим

$$l(a^{l(b)}) = l(b) \Rightarrow l(a) \cdot l(b) = l(b) \Rightarrow l(a) = 1$$

Последнее равенство невозможно, так как  $l(1) = 0$  а, из теоремы 2,  $l(n) > 1$  при  $n > 1$ . Что и требовалось доказать.

Функция  $l(n)$  - не взаимно однозначная. Как правило, для заданного числа  $m > 1, m \in \mathbb{N}$ , существует много значений  $n \in \mathbb{N}$ , для которых  $l(n) = m$ . Например,

$m = 2, n = 2$   
 $m = 3, n = 3$   
 $m = 4, n = 4$   
 $m = 5, n = 5, 6$   
 $m = 6, n = 8, 9$   
 $m = 7, n = 7, 10, 12$   
 $m = 8, n = 15, 16, 18$   
 $m = 9, n = 14, 20, 24, 27$   
 $m = 10, n = 21, 25, 30, 32, 36$   
 $m = 11, n = 11, 28, 40, 45, 48, 54$   
 $m = 12, n = 35, 42, 50, 60, 64, 72, 81$   
 $m = 13, n = 13, 22, 56, 63, 75, 80, 90, 96, 108$   
 $m = 14, n = 33, 49, 70, 84, 100, 120, 128, 135, 144, 162$   
 $m = 15, n = 26, 44, 105, 112, 125, 126, 150, 160, 180, 192, 216, 243$   
 $m = 16, n = 39, 55, 66, 98, 140, 168, 189, 200, 225, 240, 256, 270, 288, 324$

**Теорема 4.** Множество  $\{n\}$  решений уравнения  $l(n) = m$  для любого заданного числа  $m > 1, m \in \mathbb{N}$  - конечно.

**Доказательство.** Пусть  $n$  представлено разложением (1). Тогда, по теореме 2, уравнение  $l(n) = m$  сводится к уравнению

$$p_1 \cdot \alpha_1 + p_2 \cdot \alpha_2 + \dots + p_k \cdot \alpha_k = m \quad (3)$$

То есть, перебирая все решения уравнения (3), мы получим все решения  $n$  вида (1) для уравнения  $l(n) = m$ . Очевидно, простые числа  $p_1, p_2, \dots, p_k$  в (3) не могут быть больше  $m$ , поэтому мы имеем конечное число простых чисел и, следовательно, конечное число решений уравнения (3) для любого фиксированного натурального  $m > 1$ .

Для удобства обозначим через  $L_m$  - множество решений  $\{n\}$  уравнения  $l(n) = m$  для  $m > 1, m \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 5.** Множества  $L_m$  для различных  $m$  не пересекаются между собой.

**Доказательство.** Предположим противное, что существуют два различных значения  $m = r$  и  $m = s$ , для которых  $L_r$  и  $L_s$  имеют общий элемент  $n$ . Тогда  $l(n) = r$  и  $l(n) = s$ , то есть  $r = s$ . Что и требовалось доказать.

**Теорема 6.** Множества  $L_m$  содержат все натуральные числа  $n > 1$ , то есть для любого  $n > 1, n \in \mathbb{N}$  существует  $m$  (единственное по теореме 5) такое, что  $l(n) = m$ .

**Доказательство.** Пусть  $n > 1$  - произвольное натуральное число. Его можно представить в виде (1) и по формуле (3) вычислить  $m \in \mathbb{N}$ . Что и требовалось доказать.

Теоремы 5 и 6 говорят о том, что условие  $l(x) = l(y)$  задает отношение эквивалентности на множестве  $\mathbb{N} \setminus \{1\}$  и, следовательно, разбивает это множество на непересекающиеся классы эквивалентности  $L_m$ .

В полученном фактормножестве  $\{L_m\}$  казалось бы естественным образом можно определить операцию умножения:

$$L_r \cdot L_s = L_{r+s}$$

поскольку все произведения вида  $a \cdot b, a \in L_r, b \in L_s$  находятся в  $L_{r+s}$ . Однако, вообще говоря, они не исчерпывают  $L_{r+s}$ , там могут быть и другие элементы. Это хорошо видно на примере.

Пусть  $r = 7, s = 8, r + s = 15, L_7 = \{7, 10, 12\}, L_8 = \{15, 16, 18\}$ . Тогда

$$L_7 \cdot L_8 = \{105, 112, 125, 126, 150, 160, 180, 192, 216\}$$

Однако  $L_{7+8} = L_{15} = \{26, 44, 105, 112, 125, 126, 150, 160, 180, 192, 216, 243\}$  содержит три дополнительных элемента 26, 44, 243, которые получаются из других классов, представляющих число 15 в виде суммы  $L_{2+13}, L_{3+12}, \dots$

Согласно формуле (3) из теоремы 4, уравнение  $l(n) = m$  решает задачу представления натурального числа  $m$  в виде суммы простых слагаемых (с повторениями).

**Задача.** Для заданного  $n > 1, n \in \mathbb{N}$  пусть  $l(n) = m$ . Найти минимальное и максимальное значения во множестве  $L_m$ .

Здесь, к сожалению, кроме общих соображений ничего не найдено. Понятно, что величина показателей степеней в разложении числа на простые множители значительно больше влияет на величину самого числа, чем сами простые множители.

Исходя из этого, можно предположить, что в разложении на множители наименьшего значения  $L_m$  показатели степеней, вероятно, будут равны 1 или чуть больше, а в разложении на множители наибольшего значения они будут максимально возможными.

В качестве иллюстрации приведем таблицу с максимальными и минимальными значениями во множестве  $L_m$  для  $n \in [2, 43]$ :

n	min	max
2	2 = 2	2 = 2
3,	3 = 3	3 = 3
4	4 = 2 <sup>2</sup>	4 = 2 <sup>2</sup>
5	5 = 5	6 = 2 * 3
6	8 = 2 <sup>3</sup>	9 = 3 <sup>2</sup>
7	7 = 7	12 = 2 <sup>2</sup> * 3 <sup>1</sup>
8	15 = 3 * 5	18 = 2 * 3 <sup>2</sup>
9	14 = 2 * 7	27 = 3 <sup>3</sup>
10	21 = 3 * 7	36 = 2 <sup>2</sup> * 3 <sup>2</sup>
11	11 = 11	54 = 2 * 3 <sup>3</sup>
12	35 = 5 * 7	81 = 3 <sup>4</sup>
13	13 = 13	108 = 2 <sup>2</sup> * 3 <sup>3</sup>
14	33 = 3 * 11	162 = 2 * 3 <sup>4</sup>
15	26 = 2 * 13	243 = 3 <sup>5</sup>
16	39 = 3 * 13	324 = 2 <sup>2</sup> * 3 <sup>4</sup>
17	17 = 17	486 = 2 * 3 <sup>5</sup>
18	65 = 5 * 13	729 = 3 <sup>6</sup>
19	19 = 19	972 = 2 <sup>2</sup> * 3 <sup>5</sup>
20	51 = 3 * 17	1458 = 2 * 3 <sup>6</sup>
21	38 = 2 * 19	2187 = 3 <sup>7</sup>
22	57 = 3 * 19	2916 = 2 <sup>2</sup> * 3 <sup>6</sup>
23	23 = 23	4374 = 2 * 3 <sup>7</sup>
24	95 = 5 * 19	6561 = 3 <sup>8</sup>
25	46 = 2 * 23	8748 = 2 <sup>2</sup> * 3 <sup>7</sup>
26	69 = 3 * 23	13122 = 2 * 3 <sup>8</sup>
27	92 = 2 <sup>2</sup> * 23	19683 = 3 <sup>9</sup>
28	115 = 5 * 23	26244 = 2 <sup>2</sup> * 3 <sup>8</sup>
29	29 = 29	39366 = 2 * 3 <sup>9</sup>
30	161 = 7 * 23	59049 = 3 <sup>10</sup>
31	31 = 31	78732 = 2 <sup>2</sup> * 3 <sup>9</sup>
32	87 = 3 * 29	118098 = 2 * 3 <sup>10</sup>
33	62 = 2 * 31	177147 = 3 <sup>11</sup>
34	93 = 3 * 31	236196 = 2 <sup>2</sup> * 3 <sup>10</sup>
35	124 = 2 <sup>2</sup> * 31	354294 = 2 * 3 <sup>11</sup>
36	155 = 5 * 31	531441 = 3 <sup>12</sup>
37	37 = 37	708588 = 2 <sup>2</sup> * 3 <sup>11</sup>
38	217 = 7 * 31	1062882 = 2 * 3 <sup>12</sup>

39	$74 = 2 * 37$	$1594323 = 3^{13}$
40	$111 = 3 * 37$	$2125764 = 2^2 * 3^{12}$
41	$41 = 41$	$3188646 = 2 * 3^{13}$
42	$185 = 5 * 37$	$4782969 = 3^{14}$
43	$43 = 43$	$6377292 = 2^2 * 3^{13}$

Если  $n$  - простое число, то оно само и является минимальным элементом в  $L_m$ .

## Известные результаты

Функция  $l(n)$  в теории чисел широко известна. Она называется в разной литературе по-разному: **sopfr(n)** - sum of prime factors with repetition [2] **integer logarithm** - целочисленный логарифм [1] **potency of n** [3].

В энциклопедии цифровых последовательностей OEIS она зарегистрирована под номером A001414. Первые значения:  $l(1) = 0, l(2) = 2, l(3) = 3, l(4) = 4, l(5) = 5, l(6) = 5, l(7) = 7, l(8) = 6, \dots$

Кроме этого, функция  $l(n)$  используется для определения так называемых Ruth–Aaron пар [4] - пар последовательных чисел  $(n, n + 1)$  с равными значениями  $l(n) = l(n + 1)$ .

Классический пример:  $(714, 715)$ , так как  $714 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17 \Rightarrow l(714) = 2 + 3 + 7 + 17 = 29$ ,  $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13 \Rightarrow l(715) = 5 + 11 + 13 = 29$ . Здесь исследуется распределение таких пар, их связь с гипотезами о простых числах и так далее.

## Литература

- [1] N. J. A. Sloane, Sequence A001414: Integer log of n: sum of primes dividing n (with repetition), OEIS Foundation.
- [2] R. Sharipov, A note on the Sopfr(n) function, arXiv:1104.5235, 2011.
- [3] <https://oeis.org/A001414>
- [4] C. Pomerance, Ruth–Aaron pairs revisited, 2000.